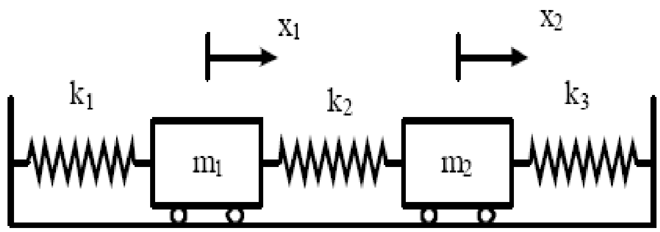
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA — P.A. 2007-3
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA — 09/02/2008
AREA ACADEMICA DE CIENCIAS BASICAS Y HUMANIDADES

SOLUCIONARIO DE LA SEGUNDA PRÁCTICA CALIFICADA DE CALCULO NUMERICO (MB535)

- **DURACION: 60 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**

P1 (06 Puntos)
Dado el siguiente sistema dinámico y sus ecuaciones de movimiento:



$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2+k_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X'' = -AX \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Si $m_1 = 2\ kg$, $m_2 = 1\ kg$, $k_1 = 10\ N/m$, $k_2 = 40\ N/m$ y $k_3 = 40\ N/m$

a) Determine A y localice sus valores propios mediante Gershegorin.
b) Determine el polinomio característico, el espectro el radio espectral de la matriz de A.
c) Calcule el valor propio de menor valor absoluto y su vector propio correspondiente, usando el método de la potencia inversa, realice 03 iteraciones a partir del vector $[1, 0]^T$ y estime el error para dicho valor propio.

Solución

a) Reemplazando valores:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 50 & -40 \\ -40 & 80 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 50 & -40 \\ -40 & 80 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

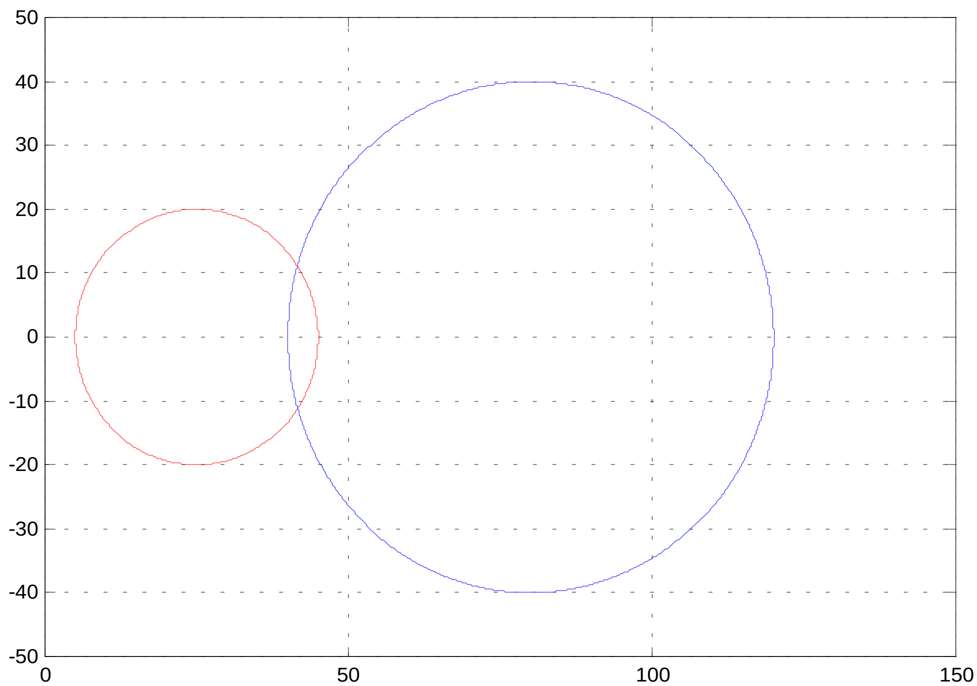
$$\begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 25 & -20 \\ -40 & 80 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 25 & -20 \\ -40 & 80 \end{bmatrix}$$

Por Gershegorin:

$$|z - 25| \le 20$$

$$|z - 80| \le 40$$



b) Polinomio característico:

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda\, I) = \lambda^2 - 105\lambda + 1200$$
$$\xi(A) = \{13.0507, 91.9493\}$$
$$\rho(A) = 91.9493$$

c) Método de la potencia inversa:

$$B = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/15 & 1/60 \\ 1/30 & 1/48 \end{bmatrix} \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y^{(1)} = Bx^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.0667 \\ 0.0333 \end{bmatrix} \quad u^{(1)} = 0.0667 \quad \lambda^{(1)} = \frac{1}{u^{(1)}} = 15 \quad x^{(1)} = \frac{y^{(1)}}{u^{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$y^{(2)} = Bx^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.0750 \\ 0.0437 \end{bmatrix} \quad u^{(2)} = 0.0750 \quad \lambda^{(2)} = \frac{1}{u^{(2)}} = 13.3333 \quad x^{(2)} = \frac{y^{(2)}}{u^{(2)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5833 \end{pmatrix}$$

$$y^{(3)} = Bx^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.0764 \\ 0.0455 \end{bmatrix} \quad u^{(3)} = 0.0764 \quad \lambda^{(3)} = \frac{1}{u^{(3)}} = 13.0909 \quad x^{(3)} = \frac{y^{(3)}}{u^{(3)}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5955 \end{pmatrix}$$

$$error = |13.0507 - 13.0909| = 0.0402$$

P2 (07 Puntos)
Sea el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} 10x_1 - 5x_5 &= 8 \\ 10x_2 - x_3 &= 4 \\ 10x_3 + x_4 &= 9 \\ -2x_2 - 5x_4 &= 4 \\ x_3 + 2x_5 &= 5 \end{cases}$$

Resuelva lo siguiente:

a) ¿Será posible la convergencia usando el método de Gauss Seidel? Justifique.
b) Es posible afirmar que el método de Jacobi converge mas lento que Gauss Seidel?. Justifique.
c) Si la respuesta en a) es afirmativa, resuelva el sistema lineal usando el método de Gauss Seidel hasta que obtener 2 cifras decimales exactas en la respuesta aproximada. $\mathbf{x}^{(o)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^t$.

Nota: Use como criterio de parada el error relativo con norma infinita.

Solución

a) El método de Gauss Seidel si es convergente porque A presenta diagonal estrictamente dominante

$$|10| > |5|$$
$$|10| > |-1|$$
$$|10| > |1|$$
$$|5| > |-2|$$
$$|2| > |1|$$

b) Si es posible, debido a que si presenta diagonal estrictamente dominante, convergen ambos métodos y más rápido Gauss Seidel

c)
$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \dfrac{8 + 5x_5^{(k)}}{10} \\ x_2^{(k+1)} = \dfrac{4 + x_3^{(k)}}{10} \\ x_3^{(k+1)} = \dfrac{9 - x_4^{(k)}}{10} \\ x_4^{(k+1)} = \dfrac{-4 - 2x_2^{(k+1)}}{5} \\ x_5^{(k+1)} = \dfrac{5 - x_3^{(k+1)}}{2} \end{cases}$$

k	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	E
0	0	0	0	0	0	1
1	0,8	0,4	0,9	-0,96	2,05	0.512
2	1,825	0,49	0,996	-0,996	2,002	0.012
3	1,801	0,4996	0,9996	-0,99984	2,0002	$0.5*10^{-3}$
4	1,8001	0,49996	0,99984	-0,99998	2,000008	-------

.

P3 (07 Puntos)
Para D=50 mm, ε =0.1 mm, Re=2e1 y considerando la siguiente ecuación:

$\frac{1}{\sqrt{f}}+2\log\left[\frac{\varepsilon}{3.7D}+\frac{2.51}{\text{Re}\sqrt{f}}\right]=0$, localizar un intervalo adecuado donde halla alguna raíz real, luego por el método de la bisección encontrar f con 2 decimales exactos y calcular el error obtenido.

Solución

iteración	a	m	b	error absoluto
0	0.1	0.55	1	0.4500
1	0.1000	0.3250	0.5500	0.2250
2	0.3250	0.4375	0.5500	0.1125
3	0.4375	0.4938	0.5500	0.0563
4	0.4375	0.4656	0.4938	0.0281
5	0.4375	0.4516	0.4656	0.0141
6	0.4516	0.4586	0.4656	0.0070
7	0.4586	0.4621	0.4656	0.0035
8	0.4621	0.4639	0.4656	0.0018
9	0.4621	0.4630	0.4639	0.0009

Por los valores obtenidos, el valor de f =0.46

Los Profesores